Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República 37, 4º, 1050–187 Lisboa
Tel. 21 795 1219 / Fax 21 795 2349
www.spm.pt gebs@spm.pt

Proposta de resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática
Para a prova de Matemática A (código 635)
2ª. Fase – 16/07/08

Grupo 1

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	D	D	C	A	B	B	D	A
Versão 2	A	A	B	D	C	C	A	D

Segunda Parte

1. $z_1 = 1 - i$

1.1.

$$\frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1-2i} = \frac{2(1-i) - i^2 - 3}{1-2i} = \frac{2 - 2i + 1 - 3}{1-2i} = \frac{-2i}{1-2i} = \frac{-2i\,(1+2i)}{(1-2i)\,(1+2i)} = \frac{-2i - 4i^2}{5} =$$

$$= \frac{-2i+4}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

1.2. $z_1{}^4 = z$

$z_1 = 1 - i$

$z_1 = \sqrt{2}\ cis\ \frac{7\pi}{4}$

Uma outra raiz quarta de z, cuja imagem geométrica pertença ao 3º Quadrante será

$$\sqrt{2}\ cis\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\ cis\ \frac{5\pi}{4}$$

2.

2.1. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ (Leis de de Morgan e probabilidade do acontecimento contrário)

Por outro lado

$P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$ (probabilidade do acontecimento contrário)

$= 1 + P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A) - P(B)$ (probabi. da união)

$= 1 - P(A \cap B)$

Assim, como ambas as expressões são iguais a $1 - P(A \cap B)$, temos a igualdade.

2.2.
Sejam os acontecimentos

A – “ser rapaz”
B – “ter classificação positiva”

A probabilidade pedida é então $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) \times P(B / A)$
$= 1 - \frac{120}{280} \times 0{,}6 = 1 - \frac{9}{35} = \frac{26}{35} \approx 0{,}74$

3.

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{42}$	$\frac{24}{42}$	$\frac{12}{42}$
	$\frac{{}^3C_2}{{}^7C_2}$	$\frac{{}^3C_1 \times {}^4C_1}{{}^7C_2}$	$\frac{{}^4C_2}{{}^7C_2}$

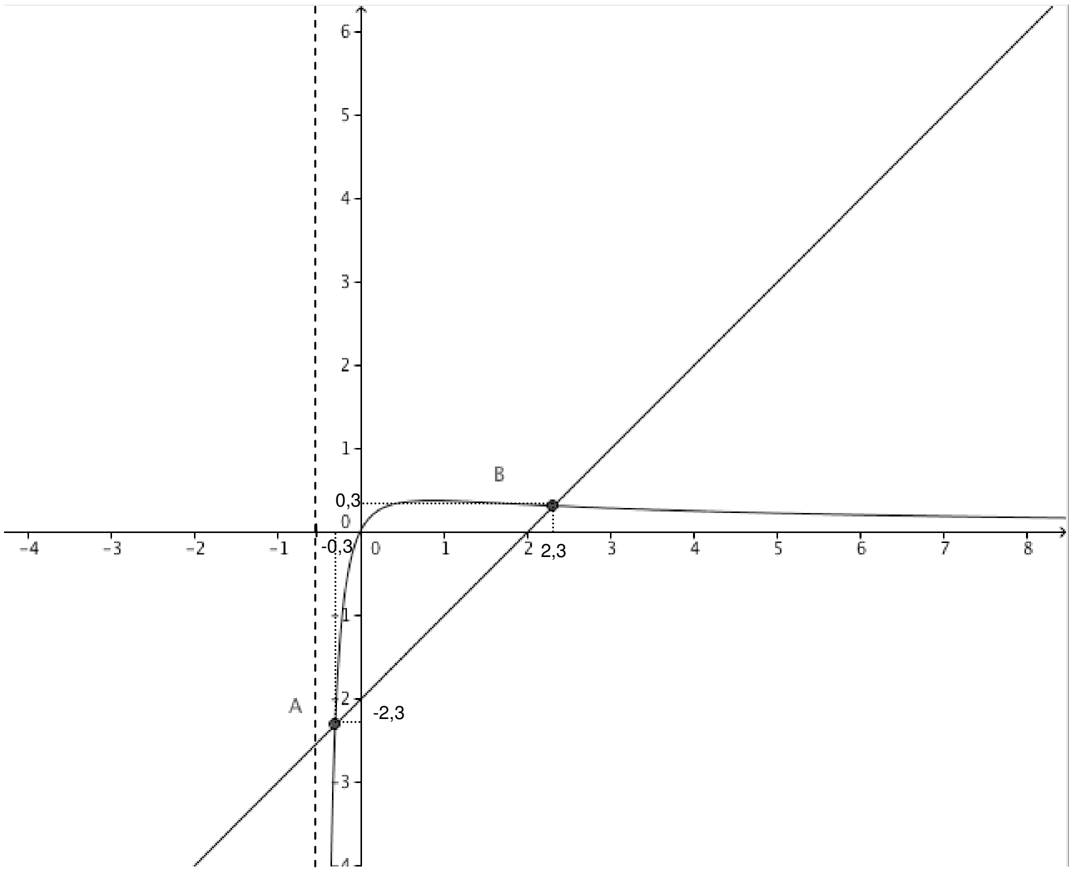
x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

De acordo com a tabela o valor mais provável da variável aleatória X é 3.

4. $f(x) = \dfrac{\ln\,(2x+1)}{2x+1} > x - 2$

A(-0,3;-2,3)   B(2,3;0,3)

As soluções inteiras encontram-se entre -0,3 e 2,3



Tendo em conta que, segundo o enunciado, há apenas dois pontos de intersecção dos gráficos, não pode haver soluções da inequação menores que -0,3 nem maiores que 2,3.
Portanto as soluções inteiras serão **0**, **1** e **2**.

5.

Como as rectas representadas são paralelas então a amplitude do ângulo *x* não pode ser nem 0 nem π, logo o domínio da função é $]0,\pi[$. Assim, podemos excluir os gráficos 1 e 4. Como a área do triângulo considerado é constante (por ter sempre a mesma base e a mesma altura) concluímos que a função ***a*** é constante o que elimina o gráfico 3. Podemos concluir então que o gráfico 2 é aquele que pode representar a função.

6.

6.1. $M(0) = 15 \times e^0 = 15$

$$15 \times e^{-0,02t} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow e^{-0,02t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,02t = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0,02}$$

$t \approx 34,657$

A massa inicial reduz-se a metade ao fim de aproximadamente 34 horas e 39 minutos.

6.2 M é uma função contínua no intervalo [2,5;4]. Logo estamos em condições de poder aplicar o Teorema de Bolzano.

$M(2,5) \approx 14,268$

$M(4) \approx 13,847$

como 13,847 < 14 < 14,268 então $\exists\, c \in\,]2,5;4[: M(c) = 14$

Podemos pois concluir que no intervalo $]2,5;4[$, existe pelo menos um instante em que a massa será de 14 gramas.

7.

7.1. $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 + sen(4x) - 2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(4x)}{4x} \times 4 = 4$

7.2. $g'(x) = 4\cos(4x)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$$

$k = 0 \quad \dfrac{\pi}{8}$

$k = 1 \quad \dfrac{3\pi}{8}$

$$g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 + sen\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2 + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

$$g\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 + sen\left(4 \times \frac{3\pi}{8}\right) = 2 + sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
g'		+	0	-	0	+	
g		↗		↘		↗	

Intervalos de monotonia

g é estritamente crescente em $\left]0, \frac{\pi}{8}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[$

g é estritamente decrescente $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$

Para $x = \frac{\pi}{8}$ a função atinge um máximo relativo cujo valor é 3.

Para $x = \frac{3\pi}{8}$ a função atinge um mínimo relativo que é igual a 1.