

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A – 12.º ANO

PROVA MODELO

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Considere um conjunto de doze bolas, seis azuis, indistinguíveis, duas pretas, indistinguíveis e quatro encarnadas, numeradas de 1 a 4.

De quantas maneiras distintas se podem colocar as doze bolas numa só fila, de modo que as azuis ocupem posições consecutivas?

A $\frac{7!}{2!}$

B $\frac{7! \times 6!}{2!}$

C $\frac{12!}{2! \times 6!}$

D $7! \times 6!$

2. A distribuição de probabilidades uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{{}^{2012}C_{298} + {}^{2012}C_{300}}{{}^{2014}C_{300}}$	$\frac{a}{{}^{2014}C_{300}}$	$\frac{{}^{2012}C_{1713}}{{}^{2014}C_{300}}$

(a designa um número real positivo)

Qual é o valor de a ?

A ${}^{2012}C_{298}$

B ${}^{2012}C_{299}$

C ${}^{2013}C_{298}$

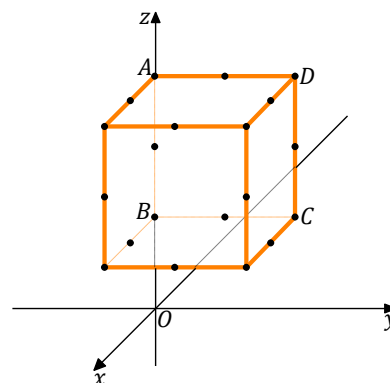
D ${}^{2013}C_{299}$

3. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ um cubo no qual se assinalaram 20 pontos, os vértices e pontos médios das suas arestas. Quatro dos vértices do cubo estão identificados com as letras A , B , C e D .

Sabe-se que a aresta $[AB]$ está contida no eixo Oz e a face $[ABCD]$ contida no plano yOz .

Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, dois dos pontos assinalados.

Qual é a probabilidade de definirem uma recta perpendicular ao eixo Oy ?



A $\frac{8}{95}$

B $\frac{12}{95}$

C $\frac{16}{95}$

D $\frac{31}{95}$

4. Seja a um número real positivo tal que $\log_4 a = \frac{1}{2}$. Qual é o valor de $\log_{16}(16a^3) - \log_4(a^3)$?

A $\frac{1}{4}$

B $\frac{1}{2}$

C $\frac{3}{4}$

D 1

5. Na figura está representado parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sabe-se que as retas de equação $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$ são assíntotas do gráfico de f .

Seja (x_n) uma progressão geométrica tal que:

$$x_2 = -\frac{16}{3} \quad \text{e} \quad x_5 = -\frac{128}{81}$$

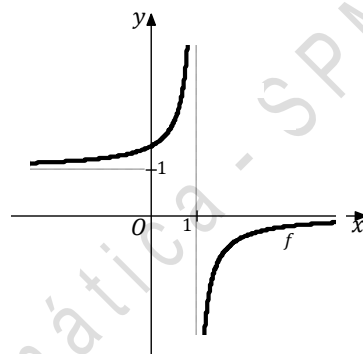
Qual é o valor de $\lim f(x_n + 1)$?

A $-\infty$

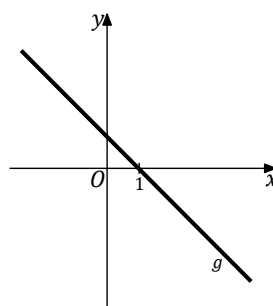
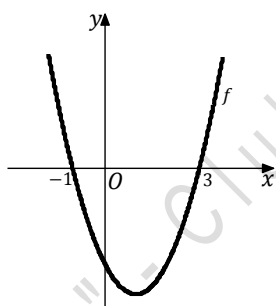
B 0

C 1

D $+\infty$



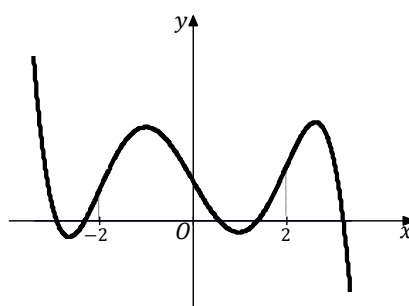
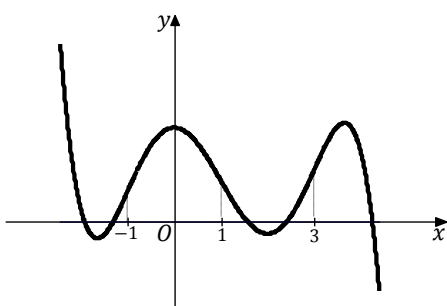
6. Nas figuras estão representadas, num referencial o.n. xOy , parte dos gráficos de duas funções polinomiais f e g .



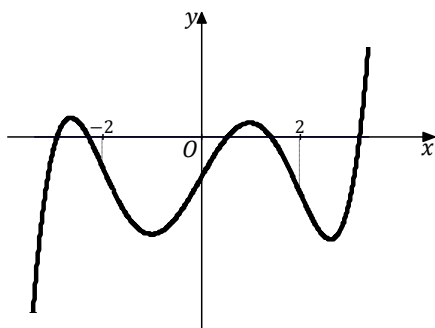
Seja h uma função de domínio \mathbb{R} , tal que $h''(x) = (f \times g)(x)$. Em qual das opções seguintes pode estar representado parte do gráfico da função $-h(x + 1)$?

A

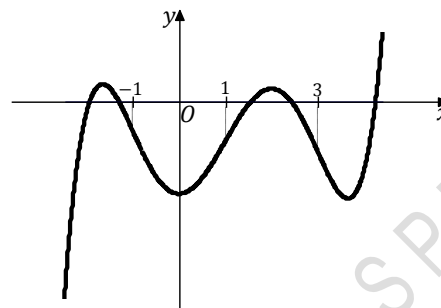
B



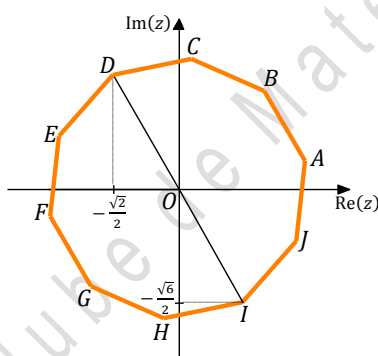
C



D



7. No plano complexo da figura está representado um decágono regular inscrito numa circunferência centrada na origem. Os vértices do decágono são as raízes de índice n de um número complexo z . O vértice D tem abcissa $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e o vértice I tem ordenada $-\frac{\sqrt{6}}{2}$.



Qual é o número complexo cuja imagem é o ponto G ?

A $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{27\pi}{20}$

B $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{19\pi}{15}$

C $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{19\pi}{15}$

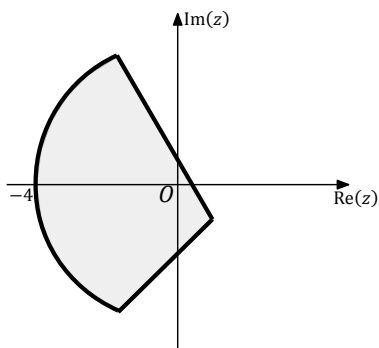
D $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{27\pi}{20}$

8. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere a seguinte condição:

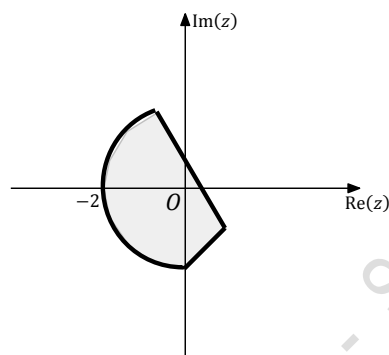
$$z \times \bar{z} \leq 4 \quad \wedge \quad \frac{2\pi}{3} \leq \arg(z + 1 - i) \leq \frac{5\pi}{4}$$

Em qual das seguintes opções pode estar representado o conjunto de pontos definido pela condição?

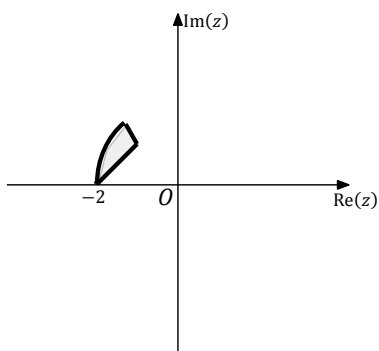
A



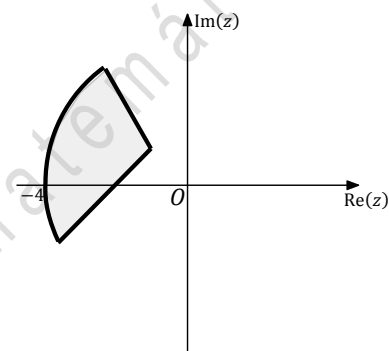
B



C



D



GRUPO I – ÍTEM DE RESPOSTA ABERTA

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{\sin \alpha + i \cos(\alpha - \pi)}{\operatorname{cis}(3\alpha) \times (-1 - \sqrt{3}i)}$, com $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

Determine o valor de α de modo que $(z \times i^{9-16n})^2$ seja um número real negativo ($n \in \mathbb{N}$).

2. Mostre que $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z} \times w) + |w|^2$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

3. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$).

3.1. Mostre que $\frac{(1 - P(\bar{A}|\bar{B})) \times (1 - P(B))}{P(A \cap B)} = \frac{P(\bar{B}|A)}{P(B|A)}$.

3.2. Num grupo de amigos sabe-se que:

- o número de amigos que gosta de música pop é o triplo do número de amigos que gosta de música rock;
- 10% gosta de ambos os tipos de música (pop e rock);
- dois em cada três dos amigos que gostam de música rock, também gostam de música pop;

Escolhendo ao acaso um dos amigos, qual é a probabilidade de não gostar de música rock, sabendo que não gosta de música pop? [Apresente o resultado na forma de fração irredutível.](#)

Sugestão: Pode utilizar a igualdade enunciada em 3.1. Nesse caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B , no contexto da situação apresentada.

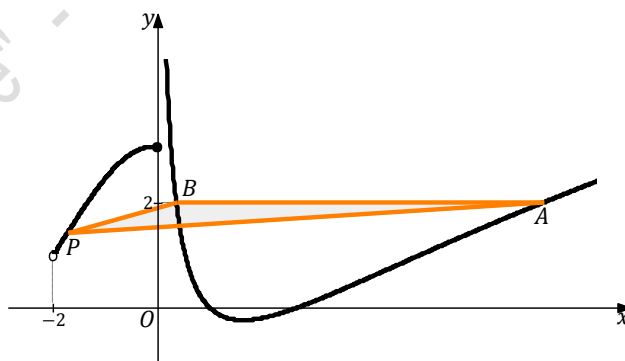
4. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}} - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \ln^2 x - \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados. Caso existam, indique as suas equações.

4.2. Estude, para $x \in \mathbb{R}^+$, a função f quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

4.3. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f e um triângulo $[ABP]$.



Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f e têm ordenada 2 e têm abcissa positiva;
- o ponto P desloca-se sobre o gráfico da função f , no segundo quadrante. Para cada posição do ponto P a sua abcissa, x , pertence ao intervalo $]-2, 0]$.

Determine as abscissas dos pontos P de modo que a área do triângulo $[ABP]$ seja igual a 2.

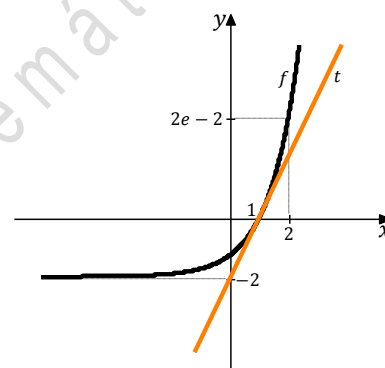
Na sua resposta deve:

- Determinar, analiticamente, o valor exacto das abscissas dos pontos A e B ;
- escrever uma condição que permite resolver o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema;
- indicar as abscissas dos pontos P que são solução do problema, apresentando-as arredondadas às centésimas.

5. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico de uma função f , contínua em \mathbb{R} .

Sabe-se que:

- a função f tem um único zero em $x = 1$ e o ponto de coordenadas $(2, 2e - 2)$ pertence ao seu gráfico;
- a recta t é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 e contém o ponto de coordenadas $(0, -2)$;
- a recta de equação $y = -2$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$.



Sejam g e h as funções de domínio \mathbb{R} definidas por $g(x) = e^{x-1} \times (f(x) + 1)$ e $h(x) = \begin{cases} 3g(x) & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2 \ln x}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Qual das seguintes afirmações não é necessariamente verdadeira?

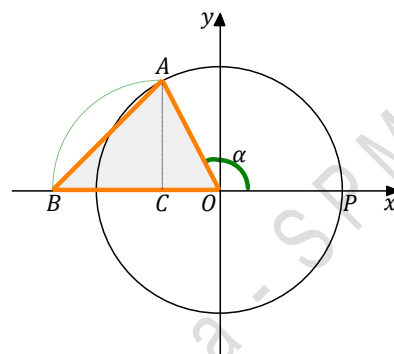
- A** A recta de equação $y = 3x - 2$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1.
- B** A equação $g(x) = e$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1, 2]$.
- C** A equação $h(x) = \frac{5}{2}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1, 2]$.
- D** A recta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de h , quando $x \rightarrow -\infty$.

Numa pequena composição indique a opção correcta e explique as razões que o levam a rejeitar as restantes opções. Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

6. Na figura estão representados em referencial o.n. xOy um círculo trigonométrico e um triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- o ponto A desloca-se sobre a circunferência, no segundo quadrante (eixos não incluídos). O ponto C acompanha o movimento de A , de modo que $[AD]$ é sempre paralelo a Oy ;
- o ponto B pertence ao eixo Ox ;
- o arco de circunferência AB está centrado em C ;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo POA , com $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.



Seja g a função que dá a área do triângulo $[OAB]$ em função de α .

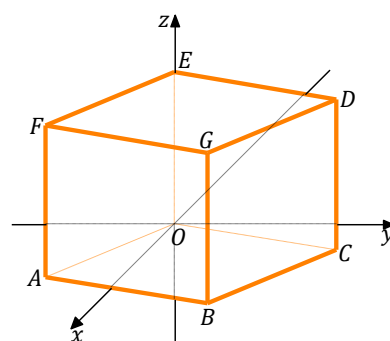
6.1. Mostre que $g(\alpha) = \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2}$. Determine $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interpreta geometricamente o resultado obtido.

6.2. Mostre que $g'(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha) - \cos(2\alpha)}{2}$ e determine o valor de α para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é máxima.

7. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma em que as bases são paralelogramos.

Sabe-se que:

- a base $[OABC]$ está contida no plano xOy ;
- a aresta $[OE]$ está contida no eixo Oz ;
- o ponto A tem ordenada -2 ;
- uma equação do plano ABG é $5x - 2y = 24$;
- uma equação da recta CG é $(x, y, z) = (-2, 7, -4) + k(4, -2, 4)$, $k \in \mathbb{R}$.



Escreve uma equação cartesiana do plano ACG .

SOLUCIONÁRIO

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. A 2. B 3. D 4. A 5. D 6. C 7. B 8. C

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. $\alpha = \frac{7\pi}{12}$
- 3.2. $\frac{10}{11}$
- 4.1. A.V.: $x = 0$; A.H.: $y = 0$, quando $x \rightarrow -\infty$.
- 4.2. $f''(x) = \frac{3-2\ln x}{x^2}$; Para $x \in \mathbb{R}^+$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $[\sqrt{e^3}, +\infty[$, tem a concavidade voltada para cima em $]0, \sqrt{e^3}]$ e tem ponto de inflexão em $x = \sqrt{e^3}$.
- 4.3. A altura do triângulo é dada por $\left| 2 - \left(\frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}} - 1 \right) \right| = \left| 3 - \frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}} \right|$ e a sua área por $\left| 3 - \frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}} \right| \times \frac{e^2-e^{-1}}{2}$. Assim:
- $$\left| 3 - \frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}} \right| \times \frac{e^2-e^{-1}}{2} = 2 \Leftrightarrow x = a \quad \vee \quad x = b, \text{ com } a \approx -1,72 \text{ e } b \approx -0,92$$
5. C
- 6.1. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o triângulo $[OAB]$ é rectângulo e isósceles. A medida do comprimento dos seus catetos é 1 e a sua área $\frac{1}{2}$.
- 6.2. $\alpha = \frac{5\pi}{8}$
7. $7x + 2y - 6z = 24$