A MATEMÁTICA de M.C. ESCHER

Conteúdos: Catarina Santa-Clara, Margarida Matias Pinto, Pedro J. Freitas
Design Gráfico: Atelier Santa Clara, Design e Comunicação
Agradecimentos: Fundação Eugénio de Almeida; M. C. Escher Foundation

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

M.C. ESCHER

Maurits Cornelis Escher nasce em Leeuwarden, na Holanda, em 1898, sendo o mais novo de cinco irmãos.

Após terminar o ensino secundário, Escher tenta seguir arquitectura, como era o desejo da sua família, mas sem êxito. Nesse percurso, vem a encontrar casualmente Samuel de Mesquita, professor de artes gráficas de origem portuguesa, que o influencia decisivamente na escolha de profissão, desenvolvendo a sua técnica de desenho e de xilogravura.

Escher começa a viajar frequentemente a Itália, onde conhece Jetta Umiker, com quem casa em 1924, instalando-se em Roma. Neste período, dedica-se a desenhar paisagens e animais, embora por vezes com perspectivas impossíveis. Em 1935 muda-se para a Suíça por questões políticas.

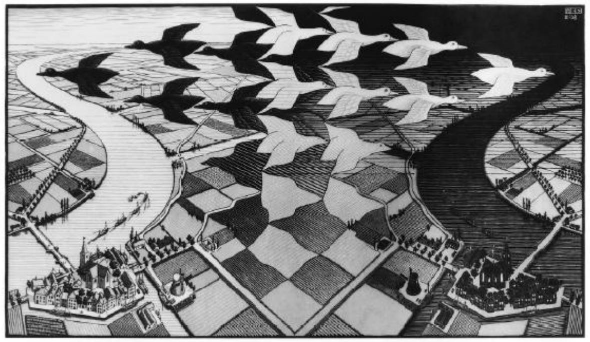
Uma viagem pelo Mediterrâneo, em 1936, vem a ser para Escher uma grande fonte de inspiração. Nessa viagem visita pela segunda vez o Alhambra, em Espanha, que estuda meticulosamente. O seu interesse por simetrias e pavimentações aprofunda-se, vindo a produzir 137 desenhos com este tema.

A partir de 1937, agora a viver na Bélgica, Escher começa a estudar conceitos matemáticos relacionados com o seu trabalho por sugestão do seu irmão Berend, que era professor de geologia e encontrou ligações entre o trabalho de Maurits e a cristalografia.

Em 1941, Escher escreve um livro de notas intitulado "Divisão regular do plano com polígonos assimétricos congruentes". Nesta altura volta a viver na Holanda, como consequência da segunda guerra mundial.

Em 1956 começa a interessar-se por geometria hiperbólica e estabelece contactos com Coxeter, de quem se torna amigo. Este interesse vem a dar origem aos seus quatro "Limites Circulares", entre outras obras. Estabelece também contactos com Penrose, ao estudar figuras impossíveis. São desta época litografias como "Beldever" e "Queda de Água".

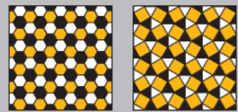
A partir dos anos 50, Escher é convidado a dar palestras sobre o seu trabalho. Recebe também a Ordem de Oranje-Nassau (holandesa) em 1955. Depois da sua morte, em 1972, o seu nome foi dado a um asteróide, 4444 Escher, em 1985.



"Dia e Noite", 1938 Xilografia

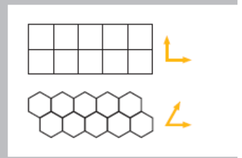
Uma **pavimentação** é uma forma de cobrir completamente o plano com ladrilhos, tendo estes formas determinadas à partida.

PAVIMENTAÇÕES e SIMETRIAS



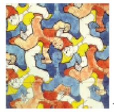
Existem pavimentações **regulares** e **irregulares** do plano. As primeiras são as que usam polígonos regulares, como triângulos, quadrados ou hexágonos. Estas três possibilidades são as únicas, se queremos usar polígonos regulares congruentes. As restantes usam figuras variadas.

As pavimentações periódicas são aquelas em que há translações, em pelo menos duas direcções distintas, que não alteram a pavimentação. O grupo de simetria de uma pavimentação periódica é o conjunto das transformações do plano que deixam a pavimentação inalterada. Foi provado que existem apenas 17 grupos de simetria de pavimentações, todos presentes nos padrões do palácio Alhambra, em Espanha.



"Cavaleiros"

"Oito Cabeças"

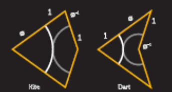


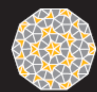
"Anões"

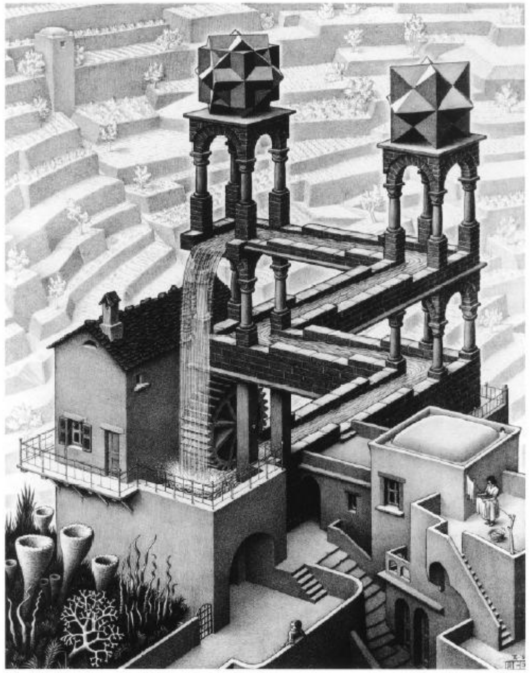
Escher apresenta pavimentações periódicas que usam ladrilhos com formas extremamente curiosas.

H. S. M. Coxeter (1907-2003) foi um matemático que se distinguiu na geometria, na teoria de grupos e na combinatória. Estudou as diversas maneiras de descrever preenchimentos do plano e do espaço a partir da repetição de um motivo inicial, chamado *domínio fundamental*. Foi amigo pessoal de Escher e sempre teve um sentido apurado da beleza na matemática.

O matemático Roger Penrose criou ladrilhos que permitem pavimentar o plano de uma forma não periódica, mas com simetrias. Há vários conjuntos de ladrilhos que possibilitam este efeito, os mais conhecidos são os chamados "kite" e "dart".





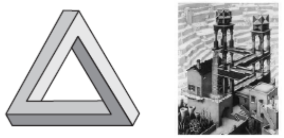


"Queda de Água", 1961 Litografia

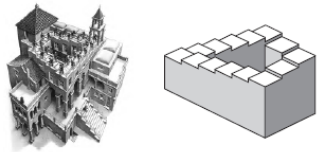
Uma **figura impossível** é um tipo de ilusão óptica que consiste numa figura a duas dimensões que é visualmente interpretada como representando a projecção de um objecto a três dimensões que, contudo, não pode existir (pelo menos na forma interpretada visualmente).

ESTRANHOS MUNDOS FIGURAS IMPOSSÍVEIS

O triângulo de Penrose, popularizado pelo matemático Roger Penrose, aparenta ser um objecto sólido fabricado com três traves de secção quadrada que se ligam duas a duas em ângulos rectos, formando assim um triângulo impossível com ângulos internos somando 270°.



"Queda de Água" – A corrente de água flui pelos lados de três triângulos de Penrose justapostos, voltando sempre ao ponto de partida, num ciclo infinito.



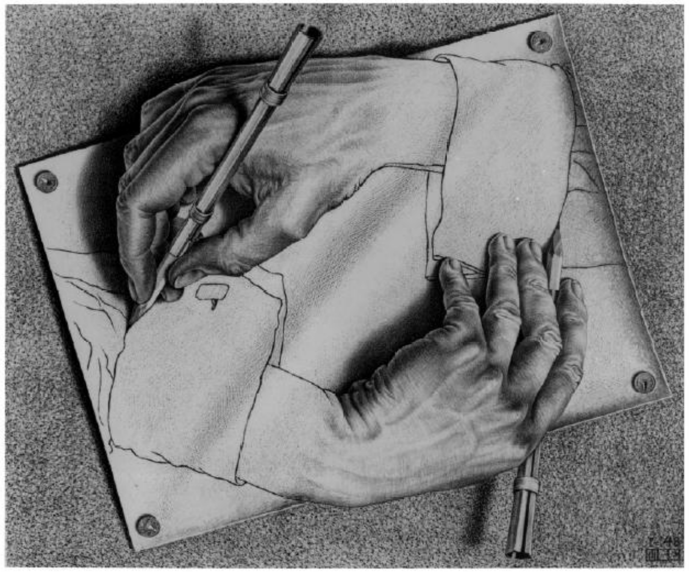
"Escada Acima e Escada Abaixo" – Neste mosteiro, vários monges sobem e descem sem fim uma escada de Penrose.

A escada de Penrose, criada por Roger Penrose e pelo seu pai, Lionel Penrose, consiste numa escadaria que faz quatro ângulos de 90°, e que sobe (ou desce) voltando ao início, num ciclo infinito. É uma distorção de perspectiva na figura bidimensional que origina este paradoxo visual.

O cubo impossível é semelhante ao triângulo de Penrose. Visto de um certo ângulo, aparenta desafiar as leis da geometria. Visto de outro ângulo, vemos que a sua forma de cubo é uma ilusão.

"Belveder" – O rapaz sentado junto ao edifício segura na mão um cubo impossível. A representação do edifício basea-se no mesmo princípio que torna o cubo impossível.

Roger Penrose (1931-) é um físico matemático inglês que fez contribuições importantes para a relatividade geral e a cosmologia. Dedicou-se também à matemática recreativa e teve vários contactos com Escher.



"Desenhando-se", 1948 Litografia

Quem barbeia um barbeiro que barbeia toda a gente que não se barbeia a si própria?

Qualquer que seja a resposta, ela entra em contradição com o enunciado da pergunta. Estamos perante um paradoxo, inspirado no célebre paradoxo de Russell.

DESENHANDO PARADOXOS

A mão que desenha uma mão que a desenha não pode ser uma mão verdadeira. Nesta litografia, as mãos pertencem simultaneamente a um mundo plano e a um mundo com volume, num conflito de representações.

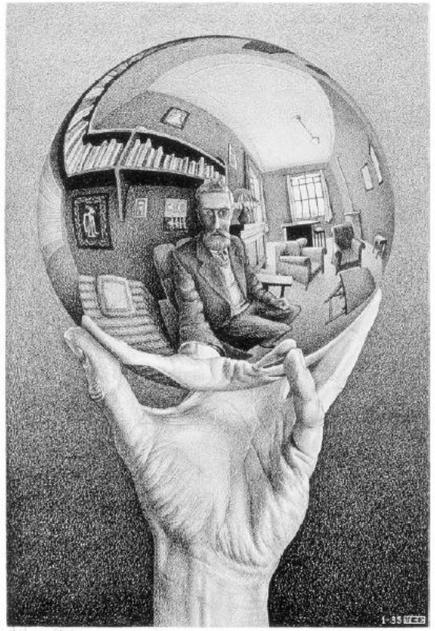
Paradoxo de Russell: Seja A o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si próprios. Quer A seja ou não um elemento de si próprio, contradiz a sua definição.

$$A = \{ x : x \notin x \}$$
$$A \in A \Leftrightarrow A \notin A$$

Este simples paradoxo questionou os fundamentos da matemática. Com paradoxos semelhantes, o lógico Kurt Gödel mostrou que a tentativa de basear toda a matemática num conjunto completo e consistente de axiomas era impossível.

O britânico Bertrand Russell (1872-1970) é considerado um dos fundadores da filosofia analítica e foi um dos maiores lógicos do século XX. O seu trabalho teve uma influência considerável nos campos da lógica, matemática, teoria de conjuntos, linguística e filosofia. Recebeu, em 1950, o prémio Nobel da Literatura.

Kurt Gödel (1906-1978) foi um filósofo, lógico e matemático austríaco. Tendo sido um dos lógicos mais proeminentes de todos os tempos, teve um enorme impacto no pensamento filosófico e científico de século XX. Gödel é mais conhecido pelos seus teoremas de incompletude, publicados em 1931, aos 25 anos, que são dois resultados que estabelecem limitações para qualquer sistema axiomático para a matemática.



"Mão com Esfera Reflectora", 1935 Litografia

Para além da geometria que todos aprendemos na escola, a geometria euclidiana, há outras geometrias que, ainda que tenham propriedades contra-intuitivas, são igualmente coerentes.

Um exemplo é a **geometria hiperbólica**. Um modelo bidimensional conhecido para esta geometria é o círculo de Poincaré. Aqui é também possível medir comprimentos e áreas, e as reflexões, rotações e translações (segundo rectas hiperbólicas) são isometrias, isto é, preservam as medidas.

LIMITES CIRCULARES e GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Nos seus "Limites Circulares", Escher parte de uma figura dentro do círculo hiperbólico e transforma-a por isometrias, pavimentando todo o círculo. Assim, na gravura "Limite Circular I", todas as figuras têm a mesma área, por serem obtidas umas das outras através de rotações ou reflexões hiperbólicas.

"Limite Circular I"

"Limite Circular III"

Em "Limite Circular III", aparecem já translações ao longo de rectas hiperbólicas. Nesta figura temos apenas quadrados e triângulos equiláteros. Em cada vértice convergem três quadrados e três triângulos equiláteros, o que seria impossível na geometria euclidiana, pois os ângulos somariam 450 graus.

Henri Poincaré (1854-1912) foi um dos mais importantes matemáticos do fim do século XIX, tendo feito contribuições de grande relevo para vários campos da matemática e para a física matemática, nomeadamente para a formulação da teoria da relatividade. Em geometria, apresentou um modelo para o plano hiperbólico que leva o seu nome: o círculo de Poincaré.

Neste modelo, as rectas são os diâmetros e os arcos de circunferência perpendiculares à circunferência limite.

Definindo rectas paralelas como rectas do plano que não se intersectam, vemos que neste modelo, por um ponto exterior a uma recta há inúmeras rectas paralelas à primeira, enquanto na geometria euclidiana há apenas uma. Todas as rectas a branco são paralelas à recta preta.

"Tira de Moebius II", 1963 Xilografia

Podemos pintar de cores distintas os dois lados de uma folha de papel mas não conseguimos fazer o mesmo com uma Tira de Moebius. A diferença deve-se ao facto de a folha ser uma superfície com duas faces enquanto a Tira de Moebius tem apenas uma face.

Outra característica da Tira de Moebius é ser uma superfície não orientável pois uma figura bidimensional que se desloque continuamente sobre ela regressa ao ponto inicial em posição invertida, como que reflectida num espelho.

TIRA DE MOEBIUS

Escher fez duas gravuras com esta fascinante figura.

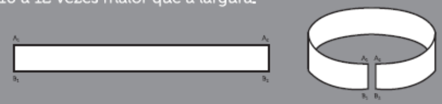
"Tira de Moebius I"
Cortando a tira de Moebius longitudinalmente e pelo meio obtém-se uma tira com duas faces. Nesta figura as faces estão pintadas cada uma de sua cor.

"Tira de Moebius II"
A formiga que se desloca sobre a tira parece passar da parte interior para a exterior e novamente para a interior mas, na realidade, percorre toda a face da tira num caminho que não tem fim.

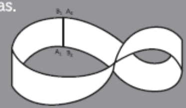
August Ferdinand Moebius (1790-1868) é um nome importante da matemática mundial, com estudos de relevo nos campos da astronomia, análise complexa, geometria e topologia. É precisamente nesta última área que cria a superfície não orientável que é conhecida por Tira de Moebius.

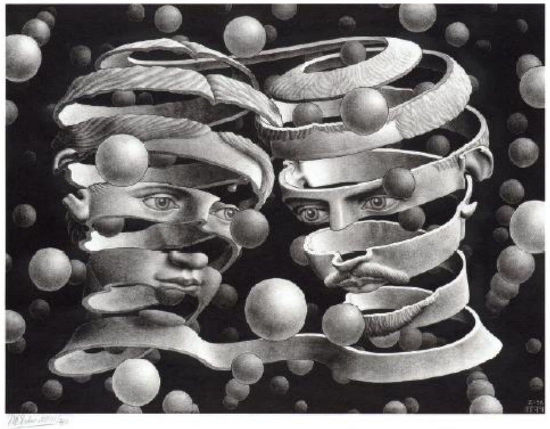
Construir uma Tira de Moebius:

1. Corte uma tira de papel ou cartolina de comprimento 10 a 12 vezes maior que a largura.



2. Cole as extremidades depois de dar meia volta a uma delas.





"Laço de União", 1956 Litografia

O trajecto mais curto entre dois pontos à superfície da Terra é dado pela **ortodromia**, o arco de círculo máximo que passa por ambos. Pode igualmente viajar-se seguindo a linha de rumo, conhecida por **loxodromia**, que faz um ângulo constante com todos os meridianos.

ESPIRAIS ESFÉRICAS e LOXODROMIA

Como o ângulo formado por um círculo máximo e os meridianos que o cortam não é sempre o mesmo, para manter um navio sobre o trajecto mais curto é necessário corrigir constantemente a direcção.

"Espirais esféricas", 1958

Curiosamente, se um navio pudesse deslocar-se no globo seguindo a loxodromia, não regressaria à origem mas aproximar-se-ia de um dos pólos sem nunca o atingir, descrevendo uma espiral que Escher traçou de forma magnífica.

Pedro Nunes (1502-1578) é considerado um dos maiores cientistas do seu tempo, matemático e cosmógrafo-real. A sua faceta mais conhecida relaciona-se com os estudos aplicados ao desenvolvimento da navegação. Descobriu a ortodromia e a loxodromia e enunciou princípios para o traçado de mapas que influenciaram decisivamente o nosso modo de ver e de nos orientarmos na superfície terrestre.

Gerardus Mercator (1512-1594) foi matemático, geógrafo e cartógrafo flamengo. A ele se deve o sistema de projecção de mapas que leva o seu nome e que transformou a cartografia. Apoiando-se nas ideias de Pedro Nunes representou meridianos e paralelos como rectas perpendiculares entre si, de modo a que as linhas de rumo fossem igualmente rectas, respeitando assim a igualdade dos ângulos com que estas cruzam os meridianos.