Resolução do Exame Matemática A – código 635 – 1ª fase 2018

1.1. (B)

$$P = {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

1.2. (B)

Como f é contínua em $[0;2]$ e diferenciável em $]0;2[$, pelo teorema de Lagrange, existe $c \in]0;2[$ tal que $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(c)$.

Como $0 < f'(c) < 9$ então $0 < \frac{f(2)-f(0)}{2-0} < 9$. Podemos então concluir observando que

$$0 < \frac{f(2)-f(0)}{2-0} < 9 \Leftrightarrow 0 < f(2) - 1 < 18 \Leftrightarrow 1 < f(2) < 19$$

2.1.

$\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR} = \|\overrightarrow{QP}\|.\|\overrightarrow{QR}\|.\cos(\overrightarrow{QP}\,\hat{}\,\overrightarrow{QR}) = 4 \times 4 \times \cos(120°) = -8$

2.2.

O ponto P é o ponto de interseção entre a reta PS, perpendicular ao plano PQR e que passa em S, com o plano PQR. Como a reta PS é perpendicular a PQR então o vetor de coordenadas $(2,3,-1)$, sendo normal ao plano PQR, é também diretor da reta PS.

Assim, uma equação vetorial da reta PS é $(x,y,z) = (14,5,0) + k(2,3,-1), k \in \mathbb{R}$ e , como P pertence ao plano PQR, as coordenadas do ponto P obtêm-se resolvendo o sistema seguinte:

$$\begin{cases} x = 14 + 2k \\ y = 5 + 3k \\ z = -k \\ 2x + 3y - z - 15 = 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 + 2k \\ y = 5 + 3k \\ z = -k \\ 2(14+2k) + 3(5+3k) - (-k) - 15 = 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 14 + 2k \\ y = 5 + 3k \\ z = -k \\ 4k + 9k + k = -28 - 15 + 15 \end{cases}, \ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ k = -2 \end{cases} \text{ logo } P(10,-1,2)$$

Assim, $\overrightarrow{PS} = S - P = (14,5,0) - (10,-1,2) = (4,6,-2)$ e $\|\overrightarrow{PS}\| = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{56}$

Então a área lateral do prisma é igual a $A = 6 \times (4 \times \sqrt{56}) = 24\sqrt{56}$

Resposta: $A \approx 179{,}6$ unidades de área (aprox. décimas)

2.3.

$P = \frac{6}{{}^6C_2 \times {}^6C_2} = \frac{2}{75}$ Resposta: $P \approx 0{,}03$ (aprox. centésimas)

3.1. (D)

$P_2 \times P_4 \times P_8 = 1935360$

3.2.

Sejam os acontecimentos: E "o aluno estuda Espanhol" e I "O aluno estuda Inglês"

De acordo com os dados do problema, $P(E \cup I) = 4P(E \cap I)$ e $P(E) = P(I)$

Assim, como

$P(E) + P(I) - P(E \cap I) = 4P(E \cap I) \Leftrightarrow 2P(E) = 5P(E \cap I) \Leftrightarrow \frac{2}{5}P(E) = P(E \cap I)$

podemos concluir que $P(I|E) = \frac{P(E \cap I)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{5}P(E)}{P(E)} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

Resposta: $P(I|E) = 40\%$

4.

De acordo com o enunciado, $L = \frac{1}{2}I$ e $R = \lambda$

Logo $I(1-\lambda)^6 . e^{-3\lambda} = \frac{1}{2}I$ o que é equivalente a

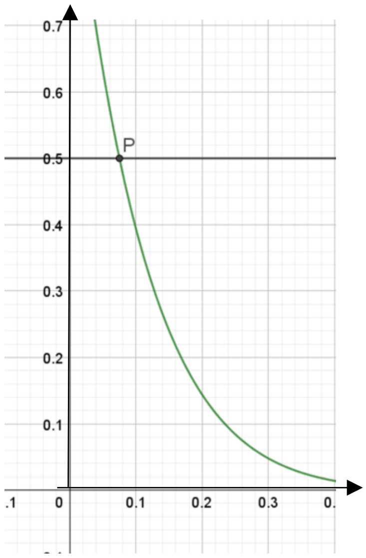
$(1-\lambda)^6 . e^{-3\lambda} = \frac{1}{2}$ porque I é não nulo.

(Ver observação)

Determinamos a abcissa do ponto de interseção dos gráficos das funções definidas por:

$y_1 = (1-x)^6 . e^{-3x}$ e $y_2 = \frac{1}{2}$

Resposta: $x_P \approx 0{,}075$



Observação 1

No enunciado é indicado explicitamente para não justificar a validade do resultado obtido na calculadora.

Porém, para que este problema fique com uma resolução matematicamente aceitável será necessário apresentar alguma justificação como a que se aponta em i), ii) e iii).

i. *Comecemos por verificar que a equação tem pelo menos uma solução:*
Seja f a função definida em [0,1] por $f(\lambda) = (1-\lambda)^6 . e^{-3\lambda} - \frac{1}{2}$

Como esta função é contínua no domínio ($[0{,}1]$) pois é a diferença de duas funções contínuas (o produto de uma função polinomial pela composta de uma função exponencial com uma polinomial e uma função constante), estamos em condições de aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy nesse intervalo..

Como $f(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ e $f(1) = -\frac{1}{2}$, tendo-se $f(1) < 0 < f(0)$ então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe um número real c no intervalo $]0{,}1[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, é garantida a existência de pelo menos uma solução para a equação $(1-\lambda)^6 . e^{-3\lambda} = \frac{1}{2}$.

ii. *Sabendo que a solução existe, provemos que ela é única:*
Sendo $f(\lambda) = (1-\lambda)^6 . e^{-3\lambda} - \frac{1}{2}$, averiguemos o sinal da função derivada f'.
$f'(\lambda) = (-3(1-\lambda) - 6(1-\lambda)^6) . e^{-3\lambda}$ é negativa em $]0{,}1[$, pelo que f é decrescente no intervalo [0;1], concluindo-se assim que a equação tem uma única solução nesse intervalo.

iii. *Assegurada a existência de uma única solução, fará sentido então procurar determinar uma aproximação da mesma, tal como é pedido, recorrendo à calculadora gráfica. Para garantirmos que a solução fornecida pela calculadora corresponde à aproximação pedida basta notar que os valores de f em dois pontos, um à esquerda e outro à direita de $0{,}075$, a uma distância inferior a 0,0005 (por exemplo $0{,}0746$ e $0{,}0754$) são respetivamente superior e inferior a $\frac{1}{2}$. Com efeito, aplicando de novo o teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que a solução única procurada está entre $0{,}0746$ e $0{,}0754$ sendo portanto igual a $0{,}075$, arredondado às milésimas.*

5. (B)

$z = (e^{ix})^{10} = e^{i10x} = \cos(10x) + i\text{sen}(10x)$. Então $Im(z) = \text{sen}(10x)$ e $Re(z) = \cos(10x)$

Finalmente, $Im(z) = \frac{1}{3}Re(z) \Leftrightarrow \text{sen}(10x) = \frac{1}{3}\cos(2x) \Leftrightarrow \text{tg}(10x) = \frac{1}{3}$ no domínio considerado.

Resposta: Utilizando a calculadora, $x \approx 0{,}03\ (aprox.centésimas)$

6.

Como a sucessão é uma progressão geométrica (de termos não nulos), $\frac{a+18}{a+6} = \frac{a+6}{a}$ o que é equivalente à equação $a\,(a+18) = (a+6)^2$.

Esta equação tem como solução única $a = 6$. Assim a razão da progressão geométrica é igual a $r = \frac{a+6}{a} = \frac{12}{6} = 2$ pelo que

$$S_7 = \frac{1-2^7}{1-2} \times u_1 \Leftrightarrow 381 = 127 \times u_1 \Leftrightarrow u_1 = 3$$

Resposta: O primeiro termo da progressão é 3.

7. (C)

8.1. (A)

Um vetor diretor da reta é $(2,-1,0)$ e de entre as diversas opções propostas apenas o ponto $(3,0,3)$ pertence à reta.

8.2. (A)

$$\text{arcsen}(1) + \text{arcos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

9.

$$\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i^5}{1+2i} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i^1}{1+2i} = \frac{\left(2\sqrt{3} - \sqrt{3}i\right)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-5\sqrt{3}i}{5} = -\sqrt{3}i$$

Logo $w = 1 + \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i^5}{1+2i} = 1 - \sqrt{3}i$

$|w| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$ e θ é tal que $tg\theta = -\sqrt{3}$ e, como o afixo de w pertence ao quarto qudrante, $\theta = -\frac{\pi}{3}$, a menos da adição de um múltiplo inteiro de 2π.

O complexo w exprime-se na forma trigonométrica por $w = 2\,e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

Sabe-se que se $w_1 = 2\,e^{i(-\frac{\pi}{3})}$ é uma das raízes quartas de um complexo z então a raiz consecutiva de argumento superior é dada por $w_1 = 2\,e^{i(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})}$, ou seja, $\boldsymbol{w_1 = 2\,e^{i(\frac{\pi}{6})}}$

Esta raiz é a solução pretendida pois o respetivo afixo pertence ao primeiro quadrante.

10.1. (D)

Para que o produto seja nulo é necessário e suficiente que um dos números seja nulo.

$$P(X=0) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} \times 2 = \frac{1}{2}$$

10.2. (D)

$\lim\left(\frac{n+k}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$

Como o limite é solução da equação $ln\left(\frac{x}{e}\right) = 3$ então $\ln\left(\frac{e^k}{e}\right) = 3 \Leftrightarrow \ln\left(e^{k-1}\right) = 3 \Leftrightarrow k = 4$

11. Como $a > 1$ então $\ln a > 0$

(I) processo

$a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln(a^x) \geq \ln\left(b^{\frac{1}{x}}\right) \Leftrightarrow x.\ln a \geq \frac{1}{x}.\ln b \Leftrightarrow x.\ln a \geq \frac{1}{x}.4\ln a \Leftrightarrow ln a.\left(x - \frac{4}{x}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow x - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x^2-4	+	0	-	-	-	0	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x}{x^2-4}$	-	0	+	n.d.	-	0	+

$\Leftrightarrow x \in [\mathbf{-2}, \mathbf{0}[\cup [\mathbf{2}, +\infty[$

(II) Processo

$\ln b = 4\ln a \Leftrightarrow \frac{\ln b}{\ln a} = 4 \Leftrightarrow log_a\, b = 4 \Leftrightarrow a^4 = b$

e $a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq (a^4)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq a^{\frac{4}{x}} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2,0[\cup [2, +\infty[$

Utilizando o quadro de estudo de sinal do processo (I).

12.1. (A)

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{e^{2x}-1}{4x} = 0 \wedge x < 0\right) \vee \left(\frac{1}{2-sen(2x)} = 0 \wedge x \geq 0\right) \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow$
$e^{2x} = 1 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x < 0$ (condição impossível)

12.2.

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{4x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x} \times \frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{y\to 0^-}\left(\frac{e^y-1}{y} \times \frac{1}{2}\right) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

aplicando a mudança de variável $y = 2x$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2 - sen(2x)} = \frac{1}{2}$

$g(0) = \frac{1}{2}$

Conclusão: g é contínua em $x = 0$ porque $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$

12.3.

$g'(x) = \left(\frac{1}{2 - \text{sen}(2x)}\right)' = \frac{-1(-2\cos(2x))}{\left(2 - \text{sen}(2x)\right)^2} = \frac{2\cos(2x)}{\left(2 - \text{sen}(2x)\right)^2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2\cos(2x) = 0 \wedge 2 - \operatorname{sen}(2x) \neq 0) \wedge x \in]0, \pi]$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \wedge \operatorname{sen}(2x) \neq 2 \wedge x \in]0, \pi] \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k.\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in]0, \pi]$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in]0, \pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos(2x)$		+	0	-	0	+	2
$(2 - sen(2x))^2$		+	+	+	+	+	4
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0,5
g		$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

g é crescente em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ e é decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

Tem dois máximos relativos: $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ e $g(\pi) = \frac{1}{2}$ e um mínimo relativo $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$

13. (B)

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen}x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}x}{x}} = 1$, logo não existe assíntota vertical em $x = 0$

$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$, logo $x = \pi$ é assíntota vertical.

14.

Tem-se que $P\left(a, \frac{lna}{a}\right)$ e $Q\left(2a, \frac{ln(2a)}{2a}\right)$, logo $\overrightarrow{PQ} = \left(a, \frac{ln2 + lna}{2a} - \frac{lna}{a}\right) = \left(a, \frac{ln2 - lna}{2a}\right)$

O triângulo é isósceles se e só se a reta PQ tiver declive igual a 1. Note-se também que

$\frac{\frac{ln2 - lna}{2a}}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{ln2 - lna}{2a^2} = 1$

Seja f a função definida em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ por $f(x) = \frac{ln2 - lnx}{2x^2}$

Como esta função é contínua no domínio $\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ pois é o quociente de funções contínuas, estamos em condições de aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2ln2}{\frac{1}{2}} = 4ln2 = ln16$ e $f(1) = \frac{ln2}{2} = ln\sqrt{2}$

Ora, tem-se que $lne = 1$ e $ln\sqrt{2} < ln2 < lne < ln16$ porque a função logarítmica de base e é crescente, ou seja, $ln\sqrt{2} < 1 < ln16 \Leftrightarrow f(1) < 1 < f\left(\frac{1}{2}\right)$

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe um valor de a no intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tal que $f(a) = 1$, ou seja, é garantida a existência de um valor de a para o qual o triângulo é isósceles.